Kidolgozott feladatok

Bayes döntési modell, döntési fák

1. **Feladat:**

A Ferencváros labdarúgó csapata a következő szezonra azt tervezi, hogy leigazolja az NB. II. tavalyi gólkirályát. Leigazolásának költsége a játékos jövő évi juttatásaival együtt 10 millió forint. Ha a játékos beválik a csapatnál, akkor 1 év alatt 20 millió forint nyereséget termel a csapatnak, ha viszont nem sikerül beverekednie magát a kezdő csapatba, akkor a rá költött 10 millió forintból semmit nem kap vissza az egyesület. Jelenleg úgy gondolják, hogy a játékosnak 55% esélye van a sikeres szereplésre a következő szezonban. A vezetőségnek lehetősége van kikérni a szurkolók véleményét. A klub bérletesei közt végzett felmérés költsége 1 millió forint. A szurkolók általában nagyon kritikusak a kiszemelt játékosokkal kapcsolatban, csak 45 % az esélye, hogy támogatják a leigazolásukat. Akit viszont támogatnak, 90% valószínűséggel beválik, akit pedig nem támogatnak csak 25% valószínűséggel válik be. Rajzolja fel a feladathoz tartozó döntési fát (a csapat vezetőségének a szempontjából), az ágakhoz tartozó valószínűséggel, és a végső ágakon lévő vagyoni helyzettel!

**Megoldás:**

A döntési fát a jelenben kezdjük, és haladunk a jövőbeli események és döntések felé.

*Döntéselágazás* (jele: □) olyan pillanatot képvisel, amikor döntést kell hoznunk. Például az időszak elején döntenünk kell, hogy kikérjük-e a bérletesek véleményét?

*Eseményelágazást* (jele: ), akkor rajzolunk, amikor külső erők

határozzák meg, hogy a néhány bekövetkező eseményből melyik következik be. (Tehát nem a döntéshozó kezében van a döntés.) Például miután megkérdeztük a szurkolókat, ők tőlünk függetlenül döntenek, hogy támogatják-e a csatár leigazolását vagy nem. Ezzel folytathatjuk a döntési fa megrajzolását, eseményelágazás után felírva az egyes ágakra a bekövetkezésük valószínűségét is.

Az olyan ágat, ahonnan már nem indul ki ág, *végső ág*nak nevezzük. Ide írhatjuk majd az aktuális végső ághoz tartozó záró vagyoni helyzetet, amely akkor adódik, ha az adott végső ághoz vezető úton lévő események következnek be. Például, ha megkérdezzük a szurkolókat, és utána a játékos sikeres, akkor a végső vagyoni helyzet: -1+20=19 (millió forintban számolva). Ez alapján a döntési fa:

1. **Feladat:**

Adja meg a csapat vezetőségének az optimális stratégiáját, ha az egyetlen céljuk, hogy a játékossal kapcsolatban minél kedvezőbben változzon az anyagi helyzetük!

**Megoldás:**

A Ferencváros végső vagyoni helyzetét kell maximalizálnunk. A szükséges döntések meghatározásához, visszafelé, azaz jobbról balra fogunk dolgozni. Minden eseményelágazásnál kiszámítjuk a várható záró vagyoni helyzetet, és beírjuk a -be. Például :

Itt a várható vagyoni helyzet: , ez kerül a -

be

Minden döntési elágazásban pirosra festjük azt a döntést, amely maximalizálja a végső vagyoni helyzetünket.

Itt a 6,5 kedvezőbb, mint a 0, tehát a 6,5 felé megyünk tovább, ezt az irányt pirosra festjük, és ezt írjuk a téglalapba.

Ezt végrehajtva az egész fán:

Ebből már le tudjuk olvasni az optimális cselelekvés sorozatot: Meg kell kérdezni a szurkolókat, ha támogatják, akkor szerződtetnünk kell a játékost, ha nem támogatják, akkor nem kell szerződtetnünk. Így várhatóan 6,65 millió forinttal javul a klub vagyoni helyzete.

1. **Feladat:**

Számítsa ki, hogy mennyi a szurkolók közti felmérésből nyert információ várható értéke! (általánosabban ez a „mintavételből nyert információ várható értéke”)

**Megoldás:**

Ha nem ismernénk a szurkolók véleményét, akkor várhatóan 6,5 millió forinttal javulna a klub anyagi helyzete. Ha a felmérés ingyenes volna, akkor 7,65 millióval javulna az anyagi helyzet. (1 millióval jobban, mint a végső eredmény, mert 1 millió volt a felmérés költsége). Így a szurkolók közti felmérésből nyert információ várható értéke: 7,65-6,5=1,15 millió forint. Ha ennél olcsóbb a felmérés költsége, akkor érdemes elvégezni, ha drágább, akkor nem érdemes.

**4.** **Feladat:**

Számítsa ki, hogy mennyi a tökéletes információ várható értéke!

**Megoldás:**

Tökéletes információt, akkor kaphatnánk, ha egy szakértő teljes biztonsággal meg tudná mondani, hogy a játékos sikeres lesz-e? A végső anyagi helyzetet befolyásoló bizonytalan kimenetelű események ugyanúgy az adott valószínűségekkel következnek be, tehát 55%, hogy sikeres lesz a focista, és 45 %, hogy nem lesz sikeres. Ekkor a várható nyereményünket a következő döntési fával számolhatjuk (Ha az információt ingyen kapjuk):

Ez azt jelenti, hogy a tökéletes információ birtokában a várható vagyoni helyzet változásunk: 11 millió forint. Enélkül 6,5 millió forint ez a változás. Ezek után a tökéletes információ várható értéke: 11-6,5=4,5 millió forint. Semmilyen szakértőnek ennél több pénzt nem szabad adnunk.

1. **Feladat:**

Egy német autókereskedő használt Opeleket vesz meg, és Magyarországon drágábban eladja őket. Három nap múlva indul egy autószállító trélere Magyarországra, amin még van hely további használt autóknak. Lát egy sürgősen eladó Opelt 4500 euróért, amiről tudja, hogy Magyarországon eladhatná 6000 euróért. Megveheti, vagy várhat egy napot és holnap veszi meg az autót 4300 euróért, ha még nincs eladva. Esetleg várhat még egy napot és megveheti az autót 4200 euróért, ha még nincs eladva. Tovább nem várhat, mert indul Magyarországra. Minden nap 10% az esélye, hogy eladják az autót. Milyen stratégiát kell követnie a kereskedőnek, hogy a várható profitja maximális legyen?

**Megoldás:**

A kereskedőnek minden egyes napon választania kell, hogy megveszi-e az autót vagy kivár? Kivárással kockáztatja, hogy elviszik az orra elől a kedvező árú autót. A döntési fában a számok a kereskedő hasznát mutatják. Döntéselágazásnál mindig a nagyobb értéket választjuk.

A döntési fából azt látjuk, hogy 4500-ért nem kell megvenni az autót, de ha másnap még eladó, akkor meg kell vennie 4300 euróért. Így a várható haszna 1530 euró lesz.

1. **Feladat:**

A Nagykörúton frissen felfestett biciklisávban szabályosan közlekedve, egy autós elgázol minket. Nyolc napon túl gyógyuló sérüléseket szenvedünk. Beperelhetjük az autóst, de győztes perre csak 40% esélyünk van, mert nem viseltünk láthatósági mellényt, és az autós arra hivatkozik, hogy emiatt nem vett észre minket. Ha megnyerjük a pert, akkor a perköltséget az autós fizeti, és kártérítést is fizetnie kell. Ennek mértéke 30%-os valószínűséggel 1 millió forint, 70%-os valószínűséggel 1,5 millió forint, attól függően, hogy a bíróság mennyire súlyosnak ítéli a sérülésünket. Ha elvesztjük a pert, akkor viselnünk kell a 100000 forint perköltséget. Az autós peren kívüli megállapodást javasol: 400000 forint kárpótlást fizetne nekünk. Mi legyen a stratégiánk, ha azt akarjuk, hogy a kapott pénz várható értéke a legnagyobb legyen?

**Megoldás:**

Az ábrán a végső ágak értékei ezer forintban adottak.

Az ábrából azt látjuk, hogy a pert kell választanunk. Így várhatóan 480000 forinthoz jutunk.

**7.feladat:**

Lehetőségünk van vásárolni Japánból az Avigan nevű, favipiravir összetevőjű gyógyszerből, 1 milliárd forint értékben. Jelenleg kutatások folynak, hogy ez a gyógyszer hatásos-e a koronavírus okozta tüdőgyulladás ellen. Úgy gondoljuk az eddigi eredmények alapján, hogy 35% esélye van, hogy hatásos a gyógyszer és ezt igazolják is a kutatások, és 65% esély van arra, hogy nem ismerik el a gyógyszer hatásosságát. Amennyiben hatásosnak ismerik el a gyógyszert 2 milliárd forint haszonnal tudjuk értékesíteni, viszont különben a gyógyszerre költött pénzünk hasztalanul elvész. A gyógyszer megvétele előtt szakvéleményt kérhetünk a Gyógyszerkutató intézettől. A szakvélemény ára 50 millió forint, és a következő valószínűségeket ismerjük:

Számítsa ki a döntési fa felrajzolásához hiányzó valószínűségeket!

**Megoldás:**

A következő valószínűségeket nem ismerjük a döntési fa felrajzolásához:

* (hatásosnak jósolják); (nem hatásosnak jósolják)
* (hatásos|hatásosnak jósolják); (nem hatásos|hatásosnak jósolják); (hatásos| nem hatásosnak jósolják); (nem hatásos|nem hatásosnak jósolják)

A teljes valószínűség tétele szerint:

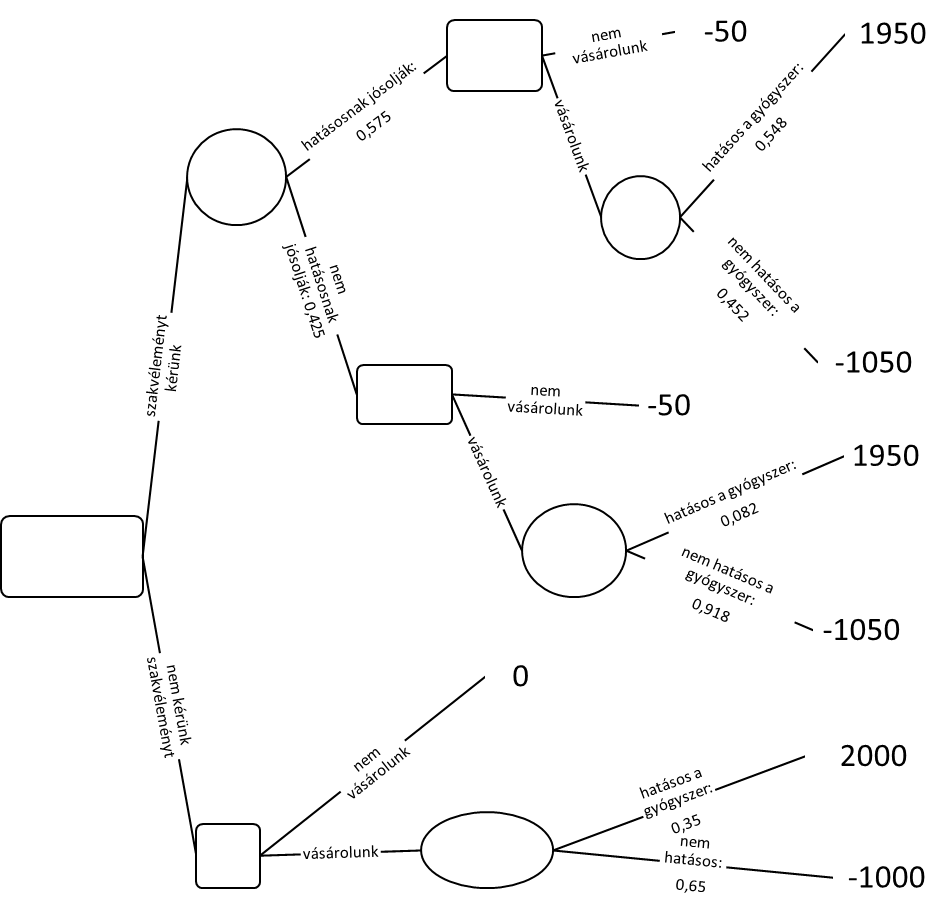
(hatásosnak jósolják )=P( hatásos )·+P(nem hatásos)·=0,35·0,9+0,65·0,4=0,575

(nem hatásosnak jósolják)=

P(hatásos)·+P(nemhatásos)·=0,35·0,1+0,65·0,6=0,425

A Bayes-tétel szerint:

**8.Feladat:** Rajzolja fel a 7.feladat döntési fáját!



**9.Feladat: a,** Adja meg az optimális döntések sorozatát a 7.feladatban

**b,** Adja meg, hogy hány forintért érdemes még megvásárolni a szakvéleményt?

**c,** Mennyi az értéke egy olyan szakvéleménynek, amely biztosan megmondja, hogy hatásosnak nyilvánítják-e a gyógyszert?

**Megoldás: a,**

Tehát szakvéleményt kell kérnünk. Ha hatásosnak jósolják, akkor vásároljunk, ha nem jósolják hatásosnak, akkor ne vásároljunk! Így várhatóan 320,3 millió forint hasznunk lesz.

**b,** Szakértő nélkül 50 millió a várható haszon. Ha a szakértő ingyen dolgozott volna, akkor 370,3 millió. Így a szakértő munkájának várható haszna:

370,3-50=320,3 millió forint

**c,**Itt ki kell számolnunk, hogy mennyi a várható nyereményünk, ha valaki biztosan megmondja, hogy hatásos-e a gyógyszer:

Tehát tökéletes szakvéleménnyel 1900 millió a várható hasznunk, az eredeti információkkal: 50 millió, így a tökéletes információ várható értéke: 1850 millió forint.

1. **Feladat**

A magyar kormánynak 2020 május végén a koronavírus járvány enyhülésével döntenie kell, hogy beengedje-e hazánkba a külföldről érkező turistákat? Úgy becsülik, hogy egy turista, aki hordozza a vírust belépésével 5 millió forint kárt okoz az országnak, aki viszont nem hordozza a vírust 100000 forint plusz adóbevételt hoz a nálunk történő költekezésével. Várhatóan a belépő turisták 0,1%-a vírushordozó. A kormány beengedheti az összes turistát, vagy esetleg senkit se. Van egy harmadik lehetőség is: Minden belépő turistán koronavírus gyorstesztet hajtanak végre, aminek költsége személyenként 2000 forint. A teszt nem teljesen pontos, annak a valószínűsége, hogy egy vírushordozónak pozitív a tesztje: 98% , és annak is van 3% valószínűsége, hogy olyan embernél mutat pozitív eredményt a teszt, aki valójában nem vírushordozó. Számítsa ki a döntési fa felrajzolásához hiányzó valószínűségeket!

**Megoldás:**

Adottak a feladat szövege szerint a következők:

(ebből következik, hogy mert a vírushordozóknál a pozitív és negatív teszt teljes eseményrendszert alkot.)

()

A teljes valószínűség tételével számolhatjuk ki, hogy mennyi a pozitív teszt valószínűsége: Pozitív teszt lehet vírushordozónál vagy nem vírushordozónál:

Ugyanígy a negatív teszt valószínűsége:

Bayes tétellel tudjuk számolni a még hiányzó valószínűségeket:

**11.feladat**

Írja fel a 10. feladathoz tartozó döntési fát, az ágakhoz tartozó valószínűségekkel!

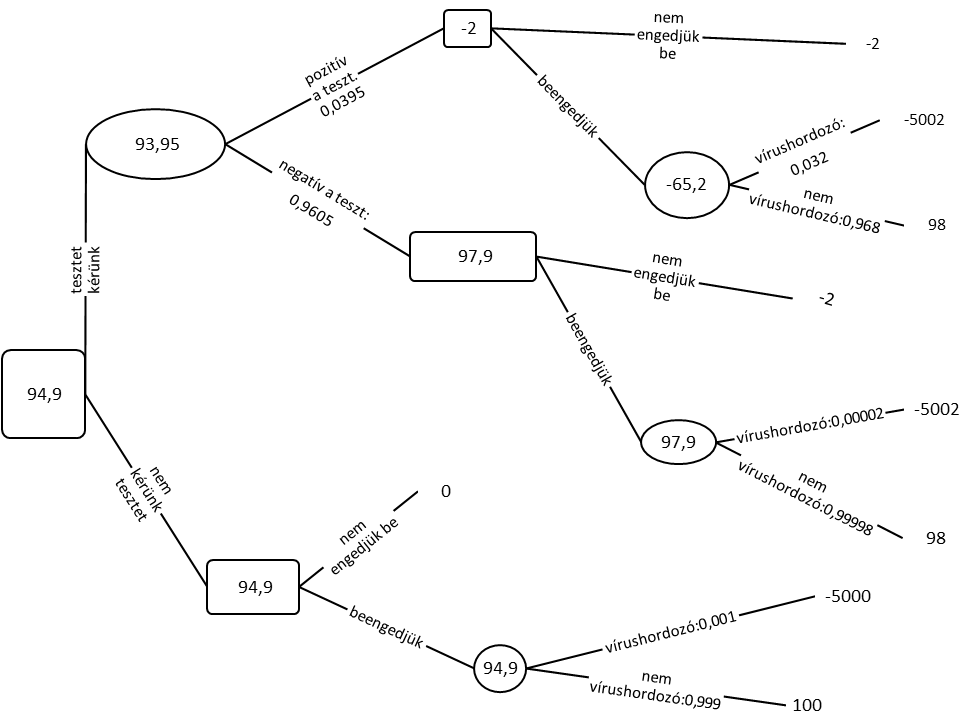
**Megoldás:**

1. **feladat**

a, Milyen döntést kell hoznia a kormánynak, ha csak anyagi szempontokat vesz figyelembe?

b, Hány forintot ér a feladatban szereplő gyorsteszt

c, mennyit érne egy teljesen pontos teszt?

**Megoldás:a, **

A döntési fa alapján az érkezőket teszt nélkül be kell engedni, ekkor egy turistán várhatóan 94,9 ezer forint haszna lesz az országnak.

b, Teszt nélkül a várható haszon 94,9 ezer forint, ha a teszt ingyen lenne, akkor a várható haszon 95,95 ezer forint lenne, így a teszt értéke:

95,95-94,9=1,05 forint. Tehát akkor lenne érdemes ezt a tesztet használni, ha 1050 forintnál olcsóbb lenne.

c, Egy teljesen pontos teszttel, a következő fából látjuk a várható hasznunkat:

Ebből a tökéletes teszt értéke: 99,9-94,9=5 ezer forint.